

twitter
@keiokyuri

facebook
はじめました!
"keiokyuri"

K y u r i z u k a i

窮理図解

新版

2013 January
no.

12

慶應義塾大学工学部広報誌

<http://www.st.keio.ac.jp/kyurizukai>

English versions are also available:

http://www.st.keio.ac.jp/kyurizukai/top_eng.html

慶應理工の 数論幾何

幾何学的直感を使って
整数論の問題を考える

数理科学科

ばんないけんいち

坂内健一

(准教授)



数学の予想問題に 新たな進展をもたらす

数学的論理体系と直感的思考を統合

人は論理と直感を組み合わせながらさまざまな課題に対応してきた。その直感、たとえば点や線などの幾何学的な図形を見たときに感じる直感を整数論の分野に活かす手法、それが数論幾何である。この数論幾何を用い、整数の性質を扱う整数論の問題に立ち向かう坂内准教授を訪ねた。

数論幾何に内在する 理論と直感の絶妙なバランス

「数学の問題を解くときに問題を絵に描いたり、提示された図形に補助線を加えたりすることで直感が働き、問題が簡単に解けた、という経験があったりするかと思います。この図形に代表される幾何学の概念を使い、整数論の課題に取り組むのが数論幾何です」と、坂内さんは自らの研究分野について話す。

幾何学の概念とはどういうことだろう。 $x^2+y^2=1$ という方程式の有理数解を全て求める問題を例に説明しよう。もちろん、式を一生懸命にいじってこの問題を解くこともできる。しかし、この方

式が平面上に描く半径 1 の単位円を考えると問題はずっと見通しが良くなる(図 1)。(x,y) = (-1, 0) はこの方程式の有理数解である。点 (-1, 0) を通る直線を 1 つ考えると、この直線は点 (-1, 0) 以外に単位円ともう 1 点だけで交わる。この直線の傾きが特に有理数であれば、新たに与えられた交点は方程式の有理数解を与える。逆に方程式の有理数解を与えると、点 (-1, 0) を通り傾きが有理数の直線が得られる。すなわち、方程式の有理数解は、傾きが有理数の直線と 1 対 1 に対応している。

このような幾何学的な考え方を取り入れた数論幾何は、数の性質を研究する整

数論とともに発展してきた。整数論は数学の中でも長い歴史があり、整数の素朴な問題を考える上でも、背後には高度に積み重ねられた論理体系が存在する。応用も広く、最近では暗号や認証技術に活用されている。整数論の問題への 1 つのアプローチが数論幾何で、多くの問題解決への貢献が期待されている。実際、数論幾何の手法はフェルマーの最終定理やモデル予想^(*)の証明に使われてきた。

「私がテーマとして取り組んできたのが“ポリログ”という幾何学的な対象です。ポリログにはいくつもの整数論的に重要な量を統一的に捉える力があります。数学の予想問題には、一見すると関係なさそうな 2 つの量の関係を明らかにするという問題が多数存在します。そのような問題に対し、その双方を統一的に説明できる上位の概念を提示できれば、両者の関係の解明に一步近づけます。ポリログはその架け橋的役割を担えるのです」。

問題の本質を捉えることで 重要な量の関係を解き明かす

坂内准教授が取り組むポリログは、“幾何学的な対象”の一種である。その概念を説明するため、ここでは“幾何学的な対象”を“図形”と読み替えてみよう。一般に図形があれば、その図形から「面積」や「頂点の数」など、様々な量を導き出すことができる。したがって、比較したい整数論的に大事な量が複数あった

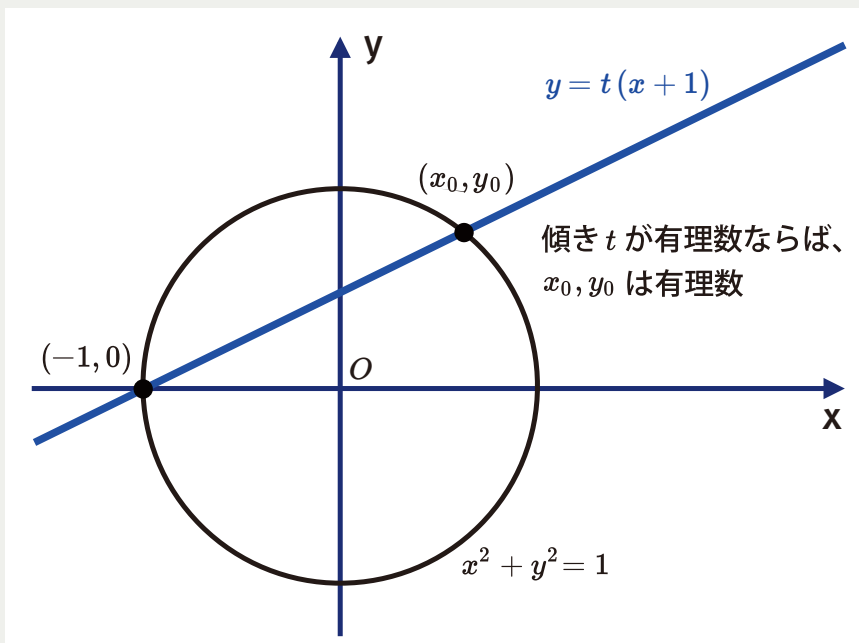


図 1 幾何を使って整数論の問題を解く
方程式 $x^2+y^2=1$ の有理数解は、点 (-1, 0) を通り傾きが有理数の直線と 1 対 1 に対応している。このように、方程式を円と見て図形的に考えると、問題の見通しが良くなる。

場合、これらの量を内在する図形を見つけることができれば、もともとの量を同じ図形の構成要素として捉えることで、異なる量を関係づける数式などを見いだすことができる。ポリログは、整数論的に大事な量を内在的に持っている図形なのである。

「たとえば、A という性質や量をどんどん抽象化したら、シンプルな図形で表せたとします。次に A とは全く違って見える B という性質や量を同じ手法で抽象化します。それが A と同じシンプルな図形で表せた場合、A と B の見た目はバラバラですが、本質的な部分で両者は同じであり、A と B を統合するルールが存在を期待することができるのです。このような抽象化によって得られる幾何学的な対象を、数論幾何の発展に大きく貢献したグロタンディーク^(*)2)は“モチーフ (Motive)”と呼ぶ。ポリログは、数論幾何の重要な概念であるこのモチーフの一例である(図 2)。

「グロタンディークが使うモチーフという言葉は、実は画家セザンヌ^(*)3)の絵画評から引用されています。セザンヌはうつろい行く光と影で描写する印象派から距離を置き、実際の絵画対象(モチーフ)を確実に捉えるという独自の絵画様式の確立に尽力したそうです。表面的な事象ではなく本質を捉えるのが、数論幾何のモチーフです」。

仲間との共同研究を通し 数学の予想問題の解決に挑む

研究内容の奥深さに対して坂内さんがテーマとしてポリログを選んだ理由はシンプルでわかりやすい。

「一番の理由は、ポリログの素朴さにひかれたからです」と坂内さんは微笑む。一般に数学者といえば、研究に没頭する世捨て人的な印象が色濃い。つい孤高を愛する数学者をイメージしてしまうが、実際の状況は必ずしもそうではない。

「高校などで数学の問題を解くときの感覚から、数学の研究は 1 人で孤軍奮闘という印象があるかもしれませんが。しかし実際のところ数学は、世界中の数学者と様々な考えを議論することを通して研究を進めていく、非常に国際性の高い

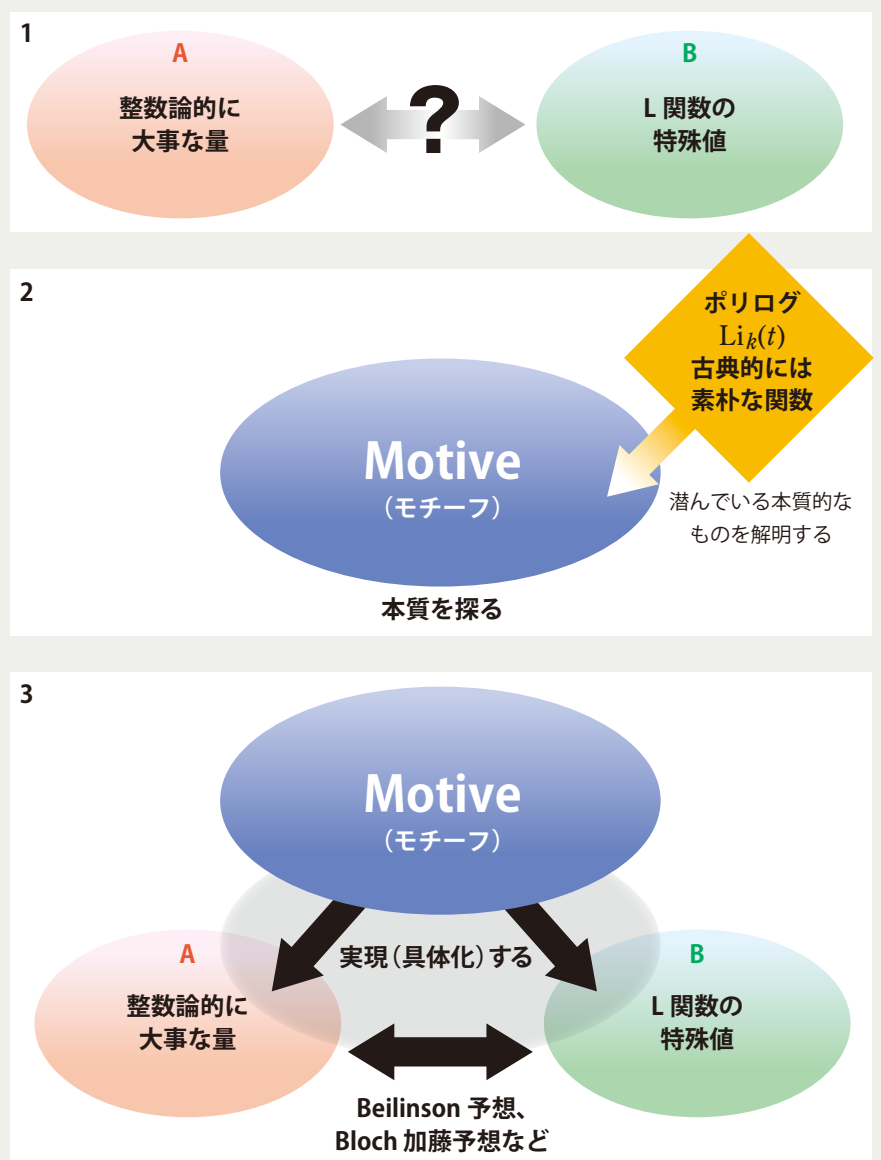


図 2 ポリログのはたらき

(1)「整数論的に大事な量」と「L関数の特殊値」という一見まったく関係のない2つの事象がある。(2)ポリログ関数を抽象化して得られた、この2つの事象の上位にある Motive (モチーフ)を使って、その背景にある本質的な関係を探る。(3) Motive を経由することで、無関係と思われた2つの事象の関係性を示すことができる。その関わりを通して、Beilinson 予想や Bloch 加藤予想などの問題の解決が導かれる。

分野です。私の最近の一連の研究も、ドイツ・レーゲンスブルグ大学の G. Kings 教授と共同で行っています。今私の研究室でも、各人それぞれのテーマを持ちながらもお互い議論し合って勉強や研究を進めています。仲間がいるという状況を楽しみつつ、そのメリットを最大限活用しています」。

坂内さんは、ポリログの発展が問題の本質解明に役立つ重要な鍵になると考えている。なにより、様々な性質や量の抽象化を通して統一的なルールを見出すという発想に、未解決の予想問題に対する美しい解法を提供する可能性を見ているのである。(取材・構成 渡辺 馨)

* 1 フェルマーの最終定理やモデル予想：どちらも長らく数学上の未解決問題であったが、モデル予想は 1983 年にゲルト・ファルティングス (Gerd Faltings) が、フェルマーの最終定理は 1995 年にアンドリュー・ワイルズ (Andrew Wiles) が解決した。

* 2 グロタンディーク：アレクサンドル・グロタンディーク (Alexander Grothendieck)。フランス高等科学研究所 (IHÉS) の創始者メンバーである。代数幾何の基盤に可換環論をはじめとして多くの数学的手法を持ち込み豊かな視点を持たせることで、数学全般に革命的な進歩をもたらした。

* 3 セザンヌ：ポール・セザンヌ (Paul Cézanne)。ポスト印象派の画家。当初は印象派の一員として活躍していたが、しだいに絵画対象(モチーフ)そのものを捉える重要性に目覚めた。20 世紀の美術に多大な影響を与えた。

数学世界の広がり

抽象化を通して、異なる世界の共通項を見いだす

幾何学的着想から整数論の予想問題に取り組む坂内さんは、高校2年までアメリカで過ごした帰国生だ。その高校時代に数学に魅せられ、今では数学的思索が趣味になってしまったという。数学の中に社会や人との関わりを良い方向に向かわせる力を見いだしてきた坂内さんは、開かれた数学を目指している。

—子ども時代をアメリカで過ごされたとのことですが、いつ頃からですか？

2歳からです。私の両親はともに数学者で、父がアメリカのオハイオ州立大学から呼ばれたことをきっかけに、家族全員で渡米しました。1970年代前半のことです。以後、幼稚園の2年間を除いてアメリカにいて、高校2年の2学期の初めに日本に戻ってきました。

—高校2年までアメリカにいて、そのままアメリカで進学という選択肢はなかったのですか？

実は日本に帰ることが決まったとき、すでに飛び級でアメリカの複数の大学から入学許可をもらっていました。1980年代後半、世界が日本の急速な発展に脅威を感じていた時期です。当時、アメリカ人の多くは日本を、年中無休で機械のように働く人々の国と考えていました。私自身、テレビで繰り返し放映された社員全員がそろってラジオ体操をする日本人の姿を見て、全体主義的な国に行くのか、と悲壮感を覚えたものです。

そんなとき、宮崎駿の『風の谷のナウシカ』に出会いました。人間世界とは異なる生態系が映像として見事に描写されていて、このような世界観を生み出す創造力に圧倒されました。これをきっかけに日本に対する興味が深まり、一度日本に戻ってみようという気持ちになりました。

—数学に興味を持ったきっかけは？

数学に興味を持ったのは高校に入ってからでした。将来のことを考えていたとき、数学も面白いかもと思える出来事に出合ったのです。

そのきっかけは化学の授業でした。化学反応による物質の濃度変化の計算に、ある微分方程式が現れたのです。それは数学の授業で計算したばかりの方程式で、その時は何とも思いませんでした。しかし、その直後に受けた生物学の大学講義でも、生態系のモデルで動物の個体数を計算するときに、全く同じ微分方程式を解くことになりました。あれ？と思いつつ、さらに経済学の授業で全く同じ微分方程式が利用され、数学の1つの



坂内健一 Bannai Kenichi

代数多様体のL関数の特殊値にまつわる予想を背景に、ポリログなどの数論幾何学的対象を用いて、抽象的な理論と具体的な特殊関数との関係についての研究を進めている。2000年、東京大学大学院数理科学研究科博士課程修了。2001年、名古屋大学大学院多元数理科学研究科助手。名古屋大学在職中、2005～07年にフランスのÉcole Normale Supérieureに日本学術振興会海外特別研究員として滞在。2008年に慶應義塾大学理工学部専任講師として着任、2012年より准教授。

抽象的な微分方程式が、幅広い分野で具体的な意味を持って使われている様子を目の当たりにしたのです。何をするにも数学は使えると思いました。

——数学が多分野で使われていることに気付かれたとのことですが、実際に数学を研究されている今、どう思いますか？

数学には事物を抽象化し、その本質を抜き出す力があります。複雑さを増している現代社会でこそ、数学の抽象化の力が活用できると感じます。様々な価値観の人がいるとき、表面的な差が大きく歩み寄るのが難しく感じることもあるかと思えます。しかしながら、全員が達成したいことを十分に考え抜くと、実はやりたいことは本質的には変わらないことに気がきます。具体的な手段や個別の事情に固執しすぎて共通点がなさそうな場合にも、問題を正しく抽象化して捉えると、同じ土俵に立つことができ、どの解決策が良いかについて冷静に議論できると思えます。

数学自身は主に方程式や幾何学的図形などの対象を扱いますが、抽象化をはじめとする数学の問題解決の考え方自体は、実社会でも非常に貴重な道具になるのではないかと再認識するようになりました。

——研究とは別に、何か息抜きにしていることはありますか？

昔から妻と過ごす時間はとても楽しみでしたが、2年ほど前に娘が生まれ、家族との時間がさらに充実したものになりました。ただ、その時間が数学の研究と切り離された時間という感覚はあまりないですね。実は最先端の数学を研究しているときも、学生と接しているときも、そして娘と遊んでいるときも、すべて同じような頭の使い方を感じています。数学と愛娘を同列に扱うと一見冷たい親のように見えてしまうかもしれませんが、私としては数学的对象にも娘に対するときと似たような愛情を抱いているのだと思います。

人との向き合い方というか、関係の築き方について、その本質を考えることが楽しくなって、今ではこうした抽象化というか、数学的思考ともいえる視点を持つことが趣味みたいな感じになっています。

数学には事物を抽象化し、本質を抜き出す力があります。この抽象化など数学の問題解決法は、実社会でも貴重な道具になります。



——慶應義塾大学の良いところとは、どんなところだと思われますか？

最初に、学生がとても元気だと思います。2007年のフランス滞在中に、ケンブリッジ大学と慶應義塾大学の共催で開かれたUK-Japan Winter Schoolという整数論の研究集会に参加したとき、慶應の学生さんにとても良い印象を持ちました。

また、多くの大学では数学は理学部の中にあり、私がいた東京大学や名古屋大学はさらに数学だけの独立した大学院で、他の学部から離れていたように感じました。でも、慶應では数理工学系は理工学部の中にあり、工学系の学科とも接点を持つことができます。他学科の教員と議論する機会も多く、理学と工学との相乗効果があると思います。元気のいい学生が多く、のびのびとした発想力にあふれているのも、こうした環境があるからかもしれませんね。

◎ちょっと一言◎

学生さんから：

●最先端の数学を研究されているのに数学者然としたところが全くなく、学生の素朴な疑問や興味にもちゃんと向き合い、面白がってくれる自由闊達な雰囲気的魅力です。授業にも熱心で、僕らに数学の楽しさを気付かせてくれます。行き詰まったときには、さりげなくヒントをくださる優しさもあります。

(取材・構成 渡辺 馨)

さらに詳しい内容は
<http://www.st.keio.ac.jp/kyurizukai>



研究室の合宿

年に1回、研究室で合宿を行っています。新4年生からポスドクの人まで参加して、勉強したことや最新の研究成果について、発表します。

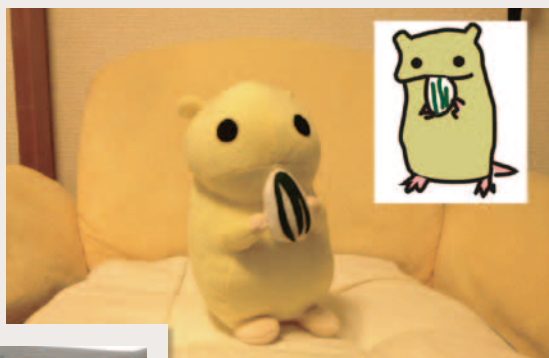


セミナー風景

研究室の4年セミナーの様子。数学の専門書の自分の担当の箇所を読んできて、他の人に解説します。うちの研究室では後で見直せるように、ビデオ撮影もしています。

マスコットはハムスター

坂内研究室のマスコット、「普通のハムスター」です。最初は妻に描いてもらったイラストでしたが、縫いぐるみまで作ってしまいました。



坂内研と坂内家

研究室のポスドク、学生さんや、家族との付き合いの中で、自分も含めてお互いどんどん成長できる良い環境を作ろうと、日々励んでいます。



二人三脚で進む研究者の道

妻は脳神経科学の研究者です。大学1年生の時に出会い一目惚れ。大学院進学直前に結婚し、研究者への道を二人三脚でともに頑張ってきました。



娘と過ごす休日

休日は2歳の娘と過ごすのが楽しみです。急速に育つ娘の姿を見て、学生を育てる方法、自分自身を育てる方法について、いろいろと考えるところがあります。



家族は良き相談相手

研究分野は違いますが、研究者が直面する問題には共通点も多く、妻は良き相談相手です。いずれ娘も会話に加われたらいいなあ、とも思います。

私の 本棚

My favorite books



● **風の谷のナウシカ** 1980年代の米国では、急成長する日本に脅威を感じてか、日本は「真似ばかりで創造性のない国」「安い賃金で労働者をこき使う国」「皆ロボットのように働く全体主義的な国」として描写されていました。私自身、親の母国であった日本にあまり興味がありませんでしたが、米国の大学に進学するか日本に戻るかを迷っていたとき、ナウシカの映画に出会い、圧倒されました。このような世界観を生み出せる人がいる国に住んでみたいと思いました。

● **失敗の本質** 祖父が徴兵され、大陸で大変な思いをしたことは聞かされて知っていました。米国で小学校に行き始めたとき、同級生から日本は戦争で米国に負けたことを何度も言われ続けたことから、何が起こったのか、幼い頃から考えるようになりました。失敗から学び、次に生かすという姿勢は、何事においても大事だと思います。

● **ガラシ玉演戯** 未来世界の架空の人物、演劇名人ヨーゼフ・クヌヒトの伝記。音楽、芸術、数学を統合した「ガラシ玉演戯」という本の中核をなすゲームの描写に感銘を受け、真剣に数学をやってみたいと思い始めました。昔は全く気にも止めませんでしたが、最近、物語の衝撃的な結末について、その意味するところを深く考えるようになりました。

● **やわらかな心をもつ** 2005～07年にフランスに研究滞在したときに友人となった指揮者、佐藤俊太郎さんに記念としていただいた本。指揮者の小澤征爾と数学者の広中平祐の対談が書かれています。佐藤さんとの付き合いを通して、音楽と数学は別世界のようで、根源的なところでは共通することも多いと感じることができました。

● **Mindset (邦題:「やればできる!」の研究)** 人間の「才能」や「能力」は努力しただいでも伸ばせると信じてきました。本書では、こういうマインドセットを持つと、様々な課題を前向きに捉えることができることを、実際の心理学の実験結果に基づいて説明しています。将来成功するための良いマインドセットを、学生さんにもうまく伝えられたらいいなあと思っています。

● **Realization of Polylogarithms** 著者の Wildeshaus が、一般的な場合にポリログの実現を定義した論文。博士課程在学中、現シカゴ大学教授の加藤和也先生の集中講義でモチーフィックな対象を構成することの難しさを実感しました。集中講義の直後に、ポリログを利用すれば、モチーフィックな元が様々な場合に作られるという可能性を示唆したこの本に出会って衝撃を受け、ポリログを自分の研究テーマにしたいと思うようになりました。

● **数学が育っていく物語** 高校数学や大学数学で出会う概念が、親しみやすい文体で書かれているシリーズ。いきなり専門書に突入する前に、どんな感じが、雰囲気をしっかり知ることができます。ちょっと先を知りたい高校生にもお勧めです。

数学と才能

坂内健一

数学は難しいとか、問題の解き方が分からない、などという言葉をよく耳にします。全く同感です。私自身、数学を研究していることから、理解できるかどうか分からない現象や、解けるかどうか分からない数学の問題に日々直面しています。それでも理解しようと一生懸命に努力したり、問題を解こうとながく考え続けると、少しずつ物事が分かってくるようになります。数学に王道なし、というユークリッドの言葉の通り、数学の力は一朝一夕に身に付くものではありません。

数学の天才というと、生まれながらにして全く苦勞せず、数学的内容をすらすらと理解していくことができる人を想像

するかもしれません。しかしながら、数学の才能は努力によって生み出されるということを、圧倒的な業績で若くして Fields 賞を受賞したタオ (Terence Tao) 氏も、自身のブログで綴っています。世界的に活躍している音楽家やスポーツ選手の華麗な技が日々の努力の賜物であるように、数学の問題を解くための斬新な発想も、やはり日々の鍛錬から生み出されます。

数学の新しい概念や難しい問題に出合ったとき、どんなに才能のある人でも解いたり理解したりするのに深く考える必要があります、時間もかかります。考える力は筋力と同じで、大きな負荷をかけることで格段に伸びます。安易に「才能がない」と思い込んでしまうと、誰しもが通る努力のステップで諦めてしまうこと

になります。

たとえば、昔は偏見から、女性は数学に向いていない、と誤解する人もいました。このために才能がないと思ひ込み、数学の勉強を諦めてしまった女性は少なからずいたと想像します。しかしながら、近年の教育の成果で、アメリカでは 2008 年以降、高校での数学の標準試験で、男女の得点の分布差が一切なくなりました。この結果は、多くの女性が、数学の才能がないという思ひ込みから解放されたことによると思います。

筋トレで体力がついてくるのを実感できると、とても気持ちが良いのと同様に、考える力がついてくるのを実感できるととても壮快です。理解するまでに頑張る必要があるだけに、開かれた世界はとても面白いものです。

理工学 Information

第 16 回 KLL 慶應義塾産学連携セミナー

<http://www.kll.keio.ac.jp/>
2013 年 2 月 22 日 (金)

機械工学の基礎テーマとも言える「精密加工」「アクチュエーション」「シミュレーション」等の研究活動をご紹介します。詳細は上記 Web サイトにて順次公開予定です。

理工学部(矢上)新 34 棟(仮称)新築工事

去る 12 月 12 日、矢上キャンパスにおいて、創立 150 年事業の一環である理工学部(矢上)新 34 棟(仮称)新築工事の地鎮祭が行われました。この新棟は機械系・化学系・管理工学系の実験実習教育の場として、理工系のトップ人材の育成のための環境としても期待されています。理工学部創立 75 年を迎える 2014 年 1 月に竣工の予定です。



完成予想図
(画像上部の白い建物)



©慶應義塾大学

編集後記

表紙の構図は、この「新版 窮理図解」を手取る人と対話するイメージをと、坂内先生が希望されて決まりました。実際には、カメラの後ろに研究室の学生の方に立ってもらい、対話しながらの撮影となりました。坂内准教授が、いかに対話を大切にされ、それを表現したいかが、この表紙の取材からもわかります。

取材には水色のシャツで爽やかに現れ、優しい笑顔と穏やかな口調で語られました。工学系の学会ではスーツ着用が当たり前とされますが、数理系はスーツを着ていると不思議がられるという分野の違いも教えていただきました。

今号から本誌に関わることとなり、今後の若手研究者の方々との出会いを楽しみに、そして引き続き、研究や研究者自身の魅力を皆様にもわかりやすくお届けできるよう努めさせていただきます。

(中野祐子)

新版 窮理図解



No.12 2013 January

編集 新版窮理図解編集委員会
写真 邑口京一郎
デザイン 八十島博明、石川幸彦 (GRID)
編集協力 サイテック・コミュニケーションズ
発行者 青山藤詞郎
発行 慶應義塾大学理工学部
〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1
問い合わせ先 (新版窮理図解全巻)
kyurizukai@info.keio.ac.jp
問い合わせ先 (産学連携)
kll-liaison@adst.keio.ac.jp

web 版 <http://www.st.keio.ac.jp/kyurizukai>
twitter <http://twitter.com/keiokuri>
facebook <http://www.facebook.com/keiokuri>