

K y u r i z u k a i

# 窮理図解

新版

2022 November  
no.

35

慶應義塾大学理工学部広報誌

<https://www.st.keio.ac.jp/education/kyurizukai/>

English versions are also available:

<https://www.st.keio.ac.jp/en/kyurizukai/>



## 慶應理工の 4次元トポロジー

特異点に着目して4次元空間を理解する

数理科学科

はやのけんた  
早野健太

(准教授)

# 注目の現代幾何学 「トポロジー」の最前線

目には見えない「4次元多様体」を探求する

地球が球体であることは今や周知の事実だ。しかし、地球の全体像を見ることができるようになったのは、ロケットが開発された20世紀のことだ。現在、私たちは宇宙の全体像を知らない。それは宇宙を外側から眺めることができないからだ。しかし、数学の理論を駆使すれば、その問題を解決できるかもしれない。そこで力を発揮するのが「トポロジー」である。

## 「トポロジー」で扱う 「多様体」とは何か

「トポロジー」は、日本語で「位相幾何学」と訳されるように、幾何学の一種だ。高校までに習う幾何学は「ユークリッド幾何学」と呼ばれるものだが、大学に入って学ぶトポロジーは、それとは異なるやり方で図形を分類し、その特徴を考える。

トポロジーで扱う図形は「多様体」と呼ばれる。多様体とは「全体の一部は認識できるが、全体像ははっきりとはわからない図形や空間」である。地球の表面はトポロジーの世界では「2次元多様体」と

呼ばれる。地球の表面のごく一部だけを見れば「平面」で、2次元空間ととらえることができるからだ。一方で、球面は3次元空間に描かれるため、「3次元なのは？」と思われるかもしれないが、これはあくまでも「3次元空間の中に存在する」だけであり、球面を構成する各点は(x, y)など独立した2つのパラメーター(変数)で表されるので、2次元である。

## 想像できない 「4次元多様体」を可視化する

トポロジーでは、さらに次元の高い「3次元」や「4次元」、「5次元」など「n次元

多様体」を扱っている。4次元以下を「低次元多様体」、5次元以上を「高次元多様体」と呼ぶ。その中で早野さんが研究しているのは、「4次元多様体」だ。

4次元多様体は、構成する各点が独立した4つのパラメーターで表される多様体である。そして、2次元多様体も4次元多様体も無数にある。しかし、私たちは3次元空間までしか認識できないので、4次元多様体がどのようなものを想像できないし、見ることもできない。

「そこで、これまでの研究では、4次元多様体の特徴を、図式を使って可視化する手法が編み出されてきました。その1つに『カービー図式』があります」と早野さん。

4次元多様体のカービー図式とは図1のようなものだ。1つの4次元多様体があったとき、その特徴を考える重要な要素の1つに、4次元多様体上の関数の「特

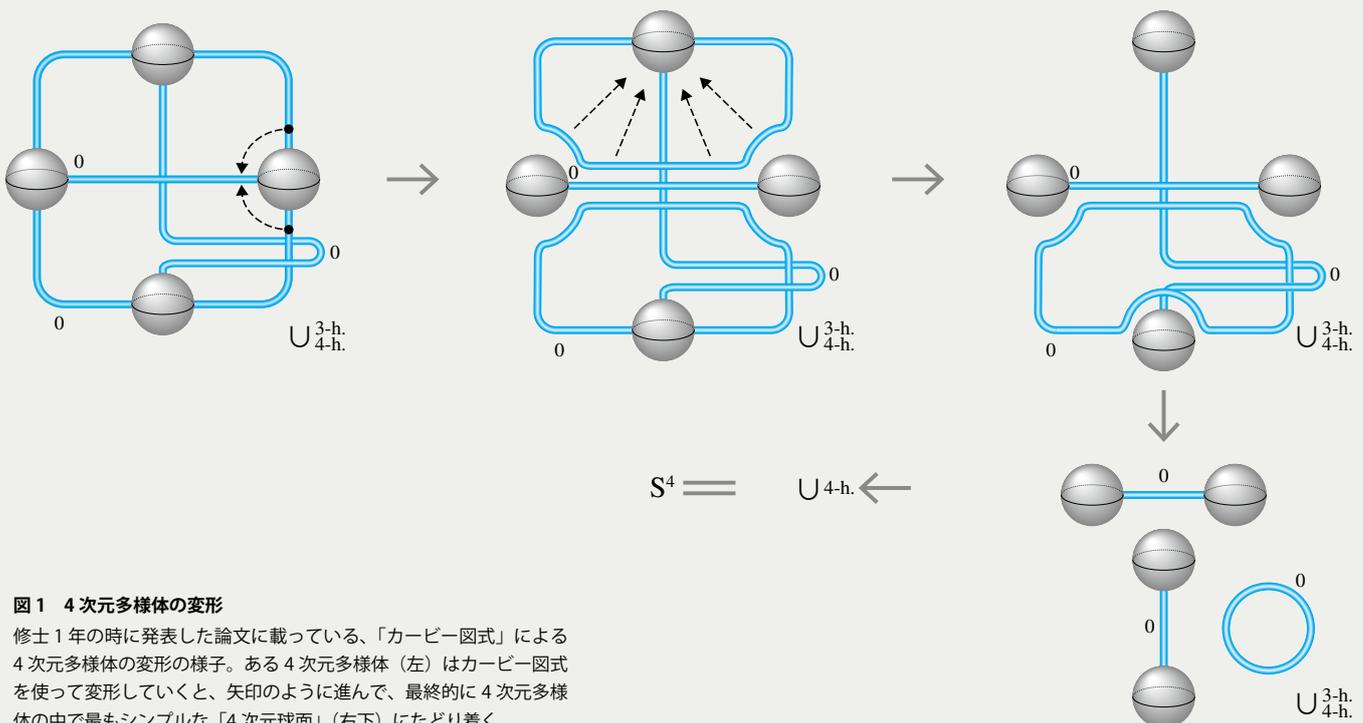


図1 4次元多様体の変形

修士1年の時に発表した論文に載っている、「カービー図式」による4次元多様体の変形の様子。ある4次元多様体(左)はカービー図式を使って変形していくと、矢印のように進んで、最終的に4次元多様体の中で最もシンプルな「4次元球面」(右下)にたどり着く。



図2 4次元多様体の図式化

「トライセクション」と呼ばれる手法によって、1つの4次元多様体上の「関数の特異点」の位置を3つの図式で表している。

異点（あるいは「臨界点」）がある。

「多様体の形は、関数の特異点などを調べるとわかります。特異点とは、その関数を微分すると0になる点のことを言います。関数の特異点の位置関係を、ある規則にしたがって描くことで、4次元多様体を表したものがカービー図式です」と早野さん。トポロジーの研究者は、カービー図式を見るだけで、一般の人には想像もつかない4次元多様体の形がわかるという。なお、4次元多様体の特徴を、図式を使って可視化する手法は他にもある。たとえば、図2は「トライセクション」と呼ばれる手法で、1つの4次元多様体上の関数の特異点の位置を3つの図式で表している。

早野さんはさまざまな4次元多様体について、「それらは、どのような特徴を持っているか」などを日々研究し、学生たちと議論しているという。

### 量子力学の「ゲージ理論」で 大きな発展を遂げた 4次元多様体の研究

「4次元多様体の場合、『位相構造』と『微分構造』とで大きな違いが現れることに強い興味を抱きました」と早野さん。

「位相構造とは、多様体を構成する各点の『つながり方』のみに着目して定義される構造をいいます。一方、多様体をさらに細かく分類するときを使うのが、形の“滑らかさ”による微分構造です。微分構造は位相構造の一種で、多様体の形に関して、より詳しい情報を持っています」

と早野さん。

高校までで習うユークリッド幾何学では、辺の長さや角度によって図形を分類する。一方、トポロジーにおいても、「多様体に、微分構造のような付加的な構造を与えて、その構造も込めて分類したいというモチベーションがあります」と早野さん。

「トポロジーの世界では、2次元多様体において、『コーヒーカップとドーナツは同じものだ』と言われます。いずれも穴が1個で、変形していくと同じ形に行き着くからです。これは、多様体を構成する各点の“つながり方”に着目した位相構造による分類です。残念ながら、3次元以下の多様体では位相構造と微分構造との差が現れないので、私たちは実感することができませんが、4次元多様体は、位相構造と微分構造の違いが顕著なのです」と早野さん。

さらに、4次元多様体の「複素構造」にも興味があるという。「複素構造を持つ多様体は、位相構造も微分構造も持ちますが、逆は成立しません。位相構造を持つからといって微分構造を持つとは限らないし、微分構造を持つからといって複素構造を持つとは限らないのです。4次元多様体では、位相構造は同じでも微分構造が異なっていたり、同じ多様体の2つの微分構造で、一方は複素構造から得られるが他方はそうではないものが存在したりします。その辺りが4次元多様体の研究の非常に興味深いところですね」と早野さん。

位相構造を持つが微分構造を持たない4次元多様体の存在は、たとえば1952年に証明された「ロホリンの定理」より従う。また、1982年には、イギリスの数学者サイモン・ドナルドソン(1957～)が、複数の異なる微分構造を持つ4次元多様体が存在することを量子力学の「ゲージ理論」を用いて証明した。それにより4次元多様体の理論が大きく発展した。

### 「宇宙の形」は解明されるのか

ではなぜn次元多様体を研究する必要があるのだろうか。

「2次元空間である平面上で、2本の直線が交差しているとき、交差を解くことはできません。しかし、3次元空間に広げると、2本の直線は上下に分かれています。さらに次元を高めると、多様体を動かす自由度が増えるので、交差を解くなどといった操作が簡単に行えるようになります。多様体が扱いやすくなります」と早野さん。

実際、最先端の物理学では、4次元を超える「高次元空間」が存在すると考えられており、「超ひも理論」では、宇宙は時間という次元を含めると10次元ではないかと言われている。そのため、高次元を扱うトポロジーは重要な研究手法の一つになっている。

近い将来、早野さんたちトポロジーの研究者が、宇宙の形の謎を解明してくれる日がくるかもしれない。

(取材・構成 山田久美)



## 興味がある問題を、興味のおもむくままに考えることが数学を楽しむコツ

子どもの頃から算数や数学は得意な方だったという早野さん。中学1年のときに初めて数学者という職業を知り、数学者への道を目指した。しかし、自分に数学者としての資質があるかどうかかわらず、早期に本格的な研究を開始する。そして、博士課程1年で博士号を取得。そんな早野さんに、数学と長く楽しく向き合うコツを聞いた。

——数学者になろうと思われたきっかけを聞かせてください。

中学1年のときに、テレビドラマ『やまとなでしこ』を見て、初めて数学者という職業があることを知ったのがきっかけです。「将来、数学者になろう」と思ったのは高校に進学する頃で、大学では数学科に入ろうと決めました。とはいえ、高校時代は、数学ばかり勉強していたわけではなく、水泳部に所属し夏合宿では1日に1万メートル以上泳ぐなど水泳にも夢中でした。

——数学の中でも、「トポロジー」を選んだのはなぜですか。

実は、学部1、2年の頃はあまり勉強せず、競技ダンスサークルに入って練習に没頭していました。しかし、学部3年の頃に、「数学の勉強も真面目に取り組まなければまずい……」と焦りを感じて、サークルをやめ数学の勉強に本腰を入れ始めました。ちょうどその頃、学内で少人数の数学セミナーが開催されることになり、参加するようになりました。そこで教授に薦められたのが、1冊のトポロジーの本でした。勉強してみたら興味がわき、どんどん惹かれていきました。



——そのまま、大阪大学の大学院に進まれ、ドイツにも行かれたと聞きました。

修士1年から論文を書き始めたのですが、ちょうどその頃に、自分と同じ問題を扱った論文を公開している先生を発見したのです。同じ問題にもかかわらず、自分と結果の一部が異なっていたので、指導教員にその先生に連絡を取っていただき、お目にかかることになりました。さらに、その先生の論文の共著者がドイツに呼んでくださり、博士課程在籍中に半年間、ドイツのマックス・プランク研究所に行きました。

——博士1年のときに日本学術振興会特別研究員に選ばれ、1年で博士号を取得されるなど、早くから論文の執筆を開始されていますね。

数学者になるリスクは高いので、学部3、4年の頃は、自分が将来、数学者としてやっていけるかどうか強い不安感を抱いていました。周囲の先生方からは、「勉強と研究は、別の能力」という話をよく聞いていたからです。

私の場合、数学の勉強は時間さえかければできるという自信がありましたが、研究に関しては判断ができませんでした。そこで、早めに研究に取り組むことで、自分には、数学者としての資質があるかどうかを見極めることにしたのです。そのため、学部4年の後半から研究を意識して勉強をするようになりました。そして、修士1年のときには、本格的に研究を開始しました。

——博士課程修了後、北海道大学で教員をされましたね。

公募で採用していただきました。北海道は食べ物も美味しく、ウィンタースポーツも楽しめる最高の環境でした。しかし、任期が5年間の期限付きでしたので、期限を待たず2年半で、同じく公募で2016年に慶應義塾大学に移籍しました。

——学生さんはどのような道に進まれるのですか。

企業に就職する人や、中学・高校の教員になる人が多いと思います。とはいえ、私の分野に限っていえば、トポロジーを生かせる就職先はほぼないと言えるでしょう(笑)。一方で、私は現在、ゲーム会社の研究職の方と共同研究をしています。





中学生のときに見た  
テレビドラマで、  
数学者という職業を知り、  
その夢をかなえました。

## 早野健太

Kenta Hayano

専門は「トポロジー」の中の低次元トポロジーで、主に「4次元多様体」と「特異点論」を研究。2013年、大阪大学大学院理学研究科数学専攻博士課程修了、博士（理学）。北海道大学の助教を経て、2016年4月より慶應義塾大学理工学部数理科学科専任講師。2020年4月より准教授（現職）。



その方が、あるゲームソフトの開発を人工知能(AI)によって自動化することに取り組んでいて、その課題に、4次元多様体の研究でも重要な「特異点論」を駆使しています。現在、AIによる機械学習や深層学習が幅広い分野で使われていますが、特異点論が役立つ分野は結構あるように感じています。

確かに、数学というキャリアパスが見えづらいかもかもしれませんが、就職に困ることはまったくなく、むしろ「数学に関する博士人材が欲しい」という企業も増えてきているように感じます。今やITを導入していない企業は少なく、幅広い業種において数学科出身者は引く手あまただと思います。

——大学で数学を専攻したいと思っている高校生へのアドバイスをお願いします。

まず、意欲があれば大歓迎です。数学は化学や生物学などとは異なり、実験装置や薬品などが不要なので費用もほとんどかからず、いつでも始めることができます。

——数学者としての今後の目標や将来の夢をお聞かせください。

現在、この3～4年ほど取り組んでいる解けない問題をいくつか抱えています。もちろん、それが解ければうれしいのです

が、基本的には毎日楽しく研究できたら、それで十分幸せかなと思っています。興味がある問題を興味のおもむくままに考えることが数学を楽しむコツです。したがって、「将来、この難問をこの手で解決してやるぞ!」といった野望などはありません(笑)。これからも楽しむことを第一に、数学と向き合っていきたいと思っています。

◎ちょっと一言◎

学生さんから：

●学部3年のときに、内容を丁寧にわかりやすく解説して下さる早野先生の講義を聞いて、トポロジーの面白さを知りました。早野研究室を選んだのも、もっとトポロジーを深く勉強したいと思ったからです。実際、先生は研究室でも懇切丁寧に指導して下さるので、1歩1歩着実に知識を積み重ねていると感じています(修士1年生)。

(取材・構成 山田久美)

さらに詳しい内容は .....  
<https://www.st.keio.ac.jp/education/kyurizukai/>



### 北海道大学の送別会

北海道大学を離れる際に、私がよく行っていたビアバーで開いてもらった送別会での1枚です。着ぐるみとタスキは主催してくれた学生が用意してくれました。

### 建部賢弘賞授賞式

2018年9月に日本数学会賞建部賢弘特別賞という賞を受賞した際の記念写真です。(前列左から2番目)



### ルスツから見た洞爺湖

ルスツのスキー場のコースの斜面(ゲレンデ)は洞爺湖とは反対向きなので、コース上から洞爺湖を見ることはできませんが、頂上から尾根に沿って少し進めば見る事ができます。この場所には何度か行っていますが、これだけ綺麗に洞爺湖が見えたのはこのときだけです。こういう景色もウィンタースポーツの楽しみのひとつだと思います。



### チセヌプリ山頂にて

札幌の友人と雪山に登った際の1枚です。ヘルメット、ゴーグル、バラクラバで顔は完全に隠れていますが、右の方の背中から草が伸びている人物が私です。この後、山頂からスノボで一気に滑り降りしました。超気持ちよかったです!

## 早野健太のONとOFF

ここでは、ONよりOFFを重視しています。

食べ飲み歩きが趣味の1つで、これまでに様々な店を訪れてきました。その中で特に印象に残っている料理を紹介します。



### よく行くビアバーの「いつもの」

グラタンやドリアなど、ホワイトソースとチーズを使った料理が好きで、よくいただきます。写真のマックアンドチーズはよく行くビアバーで頻繁に注文しているもので、ついには「いつもの」と言うように出してもらえるようになりました。



### シシャモの寿司

北海道の鶴川(むかわ)で開催された「ししゃも祭り」を訪れた際にいただきました。本州でシシャモと呼ばれているものは正確には「カラフトシシャモ」で、シシャモ自体珍しいのですが、北海道でもシシャモは干物で流通するのがほとんどで、生の状態でいただける数少ない機会でした。

### 最も美味しいポテトサラダ

ポテトサラダは好物の1つで、単純ながら店の個性もよく現れる料理だと思っており、とりあえず頼むことが多いです。このポテトサラダはこれまで食べたなかで最も美味しいと思ったものです。燻製したポテトにベーコン、ポーチドエッグ、ナッツ、コーンが入っており、クミンとゴルゴンゾーラが添えられている、かなり手の込んだ一品です。



### イノシシの刺身

OIST(沖縄科学技術大学院大学)に出張した際に、近くの居酒屋でいただきました。イノシシは鮮度が重要で生で食べられるのは珍しいらしく、沖縄本島で刺身が食べられるのはこの店だけだと聞きました。



### 特大パエリア

スペインのバレンシアで開催された研究集会の、エクスカッションの昼食で出てきた超特大パエリア。周囲の椅子やスプーンと比較するとかなり大きいことがわかるでしょう。

# 私の My favorite books 本棚



## ● スプラトゥーン2

WiiU のソフトである1からやっています。ウデマエは基本S+で、ヤグラとホコのみ何度かXになったことがあります。(が、維持できずすぐS+に戻りました) やったことがある人にはわかるかと思いますが、「初心者ではないけどそれほど上手でもない」ウデマエです。1試合が最長でも5分程度と短めで、在宅での研究の息抜きに数試合だけやることもあります。

## ● 4-Manifolds and Kirby Calculus

カービー図式の本格的な教科書。修士の頃のセミナーでも少し読みました。558ページもあります。私も全てを読んでいません。研究でたまに辞書代わりに使うこともあります。

## ● 4次元のトポロジー

トポロジーにおいて4次元に注目する動機が解説されている本で、序文にも「読者には高校程度の数学の知識の他は何の予備知識をもつことも仮定していない」と書かれている通り、基礎事項から丁寧に説明されています。とはいえずすがに高校生が細部まで全て理解するのは大変だと思いますが、大ざっぱに(4次元)トポロジーとはどんな学問か、を知るには最適な本だと思います。

## ● Algebraic Geometry I. Complex Projective Varieties

私が学部生の頃に、博士課程の先輩方との自主ゼミで読んだ、代数幾何の入門書です。当時の私の発表はかなりひどく、毎回先輩方から数多くのダメだしを受けていました。この自主ゼミで数学という学問への正しい向き合い方が身についた気がします。証明や定義の与え方が非常に秀逸で、(フィールズ賞受賞者でもある)著者の優れた才能を垣間見ることができます。

## ● 北斗の拳

ラオウを倒して終わりと思っている人が多いのではないのでしょうか？ラオウが「わが生涯に一片の悔いなし!!」と言って昇天するのは(文庫版だと)全15巻あるうちの9巻の初めの方で、その後、修羅の国に行ったり、ラオウの息子が出てきたり、とストーリーはラオウ昇天後もまだまだ続きます。他にも『あしたのジョー』や『ブラックジャック』など、レトロな漫画はけっこう好きで、研究室に置いてあります。

## ● Morse 理論の基礎

Morse理論とは関数の特異点(臨界点)に着目して多様体を調べる理論で、カービー図式を得るための土台となるものです。学部3年の頃に読んだ本で、この本をきっかけにトポロジーに興味をもちました。

## ● 英語のリスニングは発音力で決まる! UDA 式30音練習帳

修士の頃にアメリカに2か月滞在しましたが、当時の自分の英語が全く通じず絶望し、帰国後すぐに購入した本です。帰国の4か月後からドイツに半年滞在することが決まっていたので、その4か月間は必死に発音練習をしました。未だにこの本に書かれていることを全て習得できてはいませんが、練習したおかげが少しは通じるようになりました。英語の発音の難しさを実感できる一冊です。

## 数学の論文が出版されるまで

早野健太

数学の研究がどのように始まり、論文出版に至るのか、その過程を知っている人は多くはないでしょう。もちろん研究の経緯は多種多様で一概にこうとは言えませんが、ここでは私のある論文が出版されるまでの経緯を説明します。

研究開始のきっかけは、2017年11月の研究集会の休憩中に、同僚から質問をされたことでした。そのときすぐには答えられなかったものの、質問自体は素朴で答えも予想できたので、初めは先行研究を調べればすぐにわかるだろうと高をくくっていました。しかし、実際に調べてみると答えがわからないどころか、問題がそれほど簡単ではないことを示唆する事実がみえてきて、この問題に興味を持つようになりました。その後考えた結果、2018年5月に質問の答えも含めた定理を証明でき、2018年9月にその結果をまとめた論文が完成しました。あとは雑誌に掲載し

てもらっただけです。

一般に論文を雑誌に掲載してもらうには、その雑誌の編集者や、査読者と呼ばれる編集者が選んだ匿名の審査員から高い評価を得て、論文を受理してもらう必要があります。このケースでは特に出版を急ぐ理由がなかったので、初めはレベルの高い雑誌に挑戦しましたが、さすがに高すぎたのか、2018年12月に受理できないとの連絡を受けました。そこで次は少しレベルの低い雑誌に投稿しましたが、この投稿ではかなりの時間を浪費することになりました。

まず1年経っても連絡がないので2020年2月に問い合わせたところ、『査読者に催促したが返事がない、とりあえず待ってくれ』という返事を受けました。この時点で雲行きが怪しかったので投稿を取り下げるべきだったかもしれませんが、結局、待つことにしました。その後も連絡がなく、2020年6月にもう一度問い合わせると、そのときは『別の査読者を探す』と言われました。『おいおい今から探すのか…』とうんざりしましたが、ここまで待ったのだからと辛抱することになりました。そして2020年12月に改めて問い合わせても

芳しい返事は得られず、2021年3月について『バックログ(受理されて出版待ちの論文)が溜まっているから受理できません』という雑な対応をしてきました。2年以上待たされた揚げ句、理不尽な理由で断られたことになります。この雑誌には二度と投稿しないぞと心に誓いました。

この失敗を踏まえ三度目はいろいろ調べたうえで、「Mathematica Scandinavica」という雑誌に投稿することにしました。この雑誌は、バックログはもちろん前年に受理した論文の査読に要した日数の中央値まで公開しており、かなり好感を持ってました。もし同業の方がこの記事を読んでおられたら、次の投稿先にこの雑誌をぜひ検討してください。

さて投稿先を慎重に選んだことが功を奏したのか、2021年9月には査読者からの修正依頼が届き、すぐに修正するとその翌月に受理されて、2022年6月に無事出版されました。結局、研究開始から出版まで4年半、論文が完成してからでも4年弱かかったことになります。数学系の論文は往々にして査読に時間を要しますが、さすがに4年は滅多にありません。この経験はいい勉強になりました。

## 理工学 Information

### KEIO TECHNO-MALL 2022 (第23回慶應科学技術展)

「新たなコラボレーションを創出する「人間交際」の場— 大変革時代におけるチャンスとチャレンジ —」

KEIO TECHNO-MALLは、慶應義塾大学理工学部・理工学研究科の研究成果を広く発信し、産官学連携のきっかけとなる出会いの場を提供するイベントです。大学が主催する理工系展示会としては国内最大級の規模を誇ります。

2020年・2021年と、COVID-19感染拡大防止の観点からオンラインでの開催が続きましたが、今年は3年ぶりに対面での開催です。展示ブースでは研究者が自ら説明を行い、研究成果の社会実装による貢献や、独創的な研究成果によるイノベーションの創出を目指します。みなさまのご参加をお待ちしています!

日時：2022年12月2日(金) 10:00~ 18:00(予定)

会場：東京国際フォーラム ホールE2

内容：実物・実演中心の研究成果の展示、

研究者によるショートプレゼンテーション、

ゲストをお招きしてのシンポジウムセッション等

詳細：<https://www.kll.keio.ac.jp/ktm/>



## 新版 窮理図解

No.35 2022 November



編集 新版窮理図解編集委員会  
 写真 邑口京一郎  
 デザイン 八十島博明、石川幸彦 (GRID)  
 編集協力 サイテック・コミュニケーションズ  
 発行者 村上俊之  
 発行 慶應義塾大学理工学部  
 〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1  
 問い合わせ先 (新版窮理図解全般)  
[kyurizukai@info.keio.ac.jp](mailto:kyurizukai@info.keio.ac.jp)  
 問い合わせ先 (産学連携)  
[kll-liaison@adst.keio.ac.jp](mailto:kll-liaison@adst.keio.ac.jp)

web版

<https://www.st.keio.ac.jp/education/kyurizukai/>

### 編集後記

6年ぶりに数理科学科からの紹介でした。数学者は一人デスクに向かい黙々と数式を…という(勝手な)イメージを見事に吹き飛ばしてしまうほどアクティブで、話題の引き出しも多い早野准教授。居酒屋で偶然居合わせたビリヤード好きのお客さんと意気投合し、自身は本格的なビリヤードの経験が無かったにも関わらず、その後チームを組んで練習を重ねたそう。しかも、一緒に大会にまで出場したというエピソードも聞けます。

さて、今年度はもう1号発行予定です。珍しく矢上キャンパスから飛び出して、日吉キャンパスでの撮影を終えました。次号もどうぞお楽しみに! (友久由梨奈)

今号の表紙：4次元多様体を表すカービー図式