2025 年 8 月

慶應義塾大学大学院　理工学研究科

前期博士課程　入学試験問題

教育研究分野：K 管理工学

受験生への注意

・この問題冊子の総ページ数は 16 ページです。問題は 2 ページから 13 ページに印刷されており、14〜16 ページは余白です。余白は計算等に使用してもかまいません。
・この問題冊子には K1 から K9 まで 9 つの問題があります。K1 と K2 は解答必須の問題です。K3 から K9 は選択問題です。選択問題から 3 問を選んで解答しなさい。
・問題 1 問につき 1 枚の答案用紙を使って解答しなさい。答案用紙の裏面も使用することができます。
・すべての答案用紙の所定欄に、問題番号（例：K1）と受験番号を記入しなさい。（氏名は記入しない）
・答案用紙は切り離さないでください。

K1. （数学 1）

この問題は解答必須の問題です。

（1） 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7 & 4 & 1\\ 4 & 4 & 4\\ 1 & 4 & 7\end{bmatrix}$ とする。以下の問いに答えなさい。

（i） $\lambda_1 = 12$ と $\lambda_2 = 6$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値であり、$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ はそれぞれ λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトルである。このとき、行列 $\boldsymbol{A}$ の残りの固有値と、その固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい。

（ii） 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}$ に対角化する直交行列 $\boldsymbol{P}$ と対角行列 $\boldsymbol{D}$ を求めなさい。ただし、$\top$ を転置記号とする。

（iii） $\boldsymbol{I}$ を3×3型の単位行列とし、

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})$$

とする。このとき、$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{C}^k$ を求めなさい。

（2） $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ 上の任意のベクトルノルムとし、$f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|$ とする。以下の問いに答えなさい。

（i） 関数 f が $\mathbb{R}^n$ 上で凸関数であることを示しなさい。

（ii） 集合 $S=\left\{\begin{pmatrix}y\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1} \mid f(\boldsymbol{x})\le y\right\}$ が $\mathbb{R}^{n+1}$の凸集合であることを示しなさい。

K2. （数学 2）

この問題は解答必須の問題です。

(1)　X, Y は独立な確率変数でそれぞれ確率密度関数 f_X, f_Y をもつ。このとき、任意の実数 x に対して

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) f_Y(y) dy$$

であることを示しなさい。ただし、f_{X+Y} は $X+Y$ の確率密度関数である。

(2)　$X,\ Y,\ Z$ は以下で与えられる累積分布関数をもつ独立同一分布の確率変数とする。

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

（i）　X^2 の期待値を求めなさい。

（ii）　X, Y, Z のうち少なくとも一つの値が $\log 2$ 以上である確率を求めなさい。ただし、対数の底を e とする。

（iii）　$2X + Y + Z$ の確率密度関数を導出しなさい。

K3.（統計）

（1） 次の小問に答えなさい。必要があれば、標準正規分布の上側確率 0.025, 0.05, 0.1, 0.2 の点はそれぞれ 1.960, 1.645, 1.282, 0.842 であることを用いてよい。

（ｉ）期待値はμ、分散はσ^2の正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う独立なn個の確率変数$x_1, x_2, \dots, x_n$が観測されるとする。$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$とおくとき、$\bar{x}$の期待値および分散を求め、$\bar{x}$が従う分布を記しなさい。

（ⅱ）（ｉ）に基づき、μの95%信頼区間を求めなさい。ただし、σは既知の母数としてよい。導出の過程も記すこと。

（ⅲ）（ｉ）に基づき、帰無仮説$H_0: \mu = \mu_0$、対立仮説$H_1: \mu > \mu_0$の右片側検定を有意水準5%で行うとき、帰無仮説H_0の棄却域を記しなさい。ただし、σは既知の母数としてよい。導出の過程も記すこと。

（ⅳ）重回帰モデルを$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e}$とおく。ここで、$\boldsymbol{y}$は目的変数ベクトル、$\boldsymbol{X}$は説明変数行列、$\boldsymbol{\beta}$は偏回帰係数ベクトル、$\boldsymbol{e}$は誤差ベクトルである。最小二乗法に基づき、$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}\|^2 = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$を最小にする$\boldsymbol{\beta}$の式を求めて$\boldsymbol{\beta}$の最小2乗推定量とする（$\top$は転置を表す)。このとき、$\boldsymbol{\beta}$の最小2乗推定量の式を求めなさい。ただし、$\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}$ が逆行列を持つことを仮定してよい。導出の過程も記すこと。

(2) 次の用語（ｉ）と（ⅱ）のどちらか 1 つを選び、説明しなさい。

（ｉ）最尤推定量

（ⅱ）主成分分析

K4.（オペレーションズ・リサーチ）

(1) 次の線形計画問題(P)について、以下の問いに答えなさい。$\boxed{（ア）}$から$\boxed{（カ）}$には適する式や値などを答えなさい（結果のみでよい）。各問題に対する解答箇所が分かるように注意しなさい。

$$
\text{線形計画問題(P)}\left|\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z = 5x_1 + 7x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 \leq 13, \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 14, \\
 & x_1 \leq 6, \\
 & x_1,\ x_2 \geq 0.
\end{array}\right.
$$

（ｉ）線形計画問題(P)の最適解 (x_1^*, x_2^*) は$(x_1^*, x_2^*) = \boxed{（ア）}$ であり、最適値 z^* は $z^* = \boxed{（イ）}$である。

（ⅱ）問題(P)と同じ制約式をもち、目的関数が、$x_1 + ax_2$である線形計画問題(Q)を考える（ただしaは正の定数）。問題(Q)が無数の最適解をもち、かつ、問題(P)の最適解を含むときのaの値は$\boxed{（ウ）}$と$\boxed{（エ）}$の 2 通りである。

（ⅲ）問題(P)の双対問題(D)を答えなさい。ただし、導出過程は記述せず、結果のみを示しなさい。

（ⅳ）問題(D)の最適解は$\boxed{（オ）}$であり、最適値は$\boxed{（カ）}$である。

（ｖ）問題(P)が表すと考えられる現実の最適化問題の例を一つ挙げ、目的関数および制約式の意味を具体的に説明しなさい。

(2) 次の用語（ｉ）と（ⅱ）のどちらか 1 つを選び、説明しなさい。

（ｉ）PERT におけるクリティカル・パス

（ⅱ）待ち行列理論における$\mathrm{M/M/}c$モデル（cは 2 以上の整数）

K5.（経営）

(1) 市場にn個の資産が存在し、各資産の収益率の平均はm、分散はσ^2で等しいとする。またすべての資産への投資金額が等しい場合、すなわち資産i $(i = 1, \dots, n)$について投資ウェイトを$w_i = 1/n$としたとき、以下の問題に答えなさい。

（ｉ）各資産間の収益率が独立の場合、ポートフォリオの収益率の分散を求めなさい。

（ⅱ）任意の資産i, j $(i \neq j)$の収益率r_i, r_jの共分散が$cov(r_i, r_j) = 0.3\sigma^2$ $(i \neq j)$の場合、ポートフォリオの収益率の分散を求めなさい。

（ⅲ）上の結果をもとにポートフォリオのリスクを軽減させるために必要なことを述べなさい。

(2) 現在の株価が 100 円、無リスク利子率が 1%、満期 1 年、権利行使価格が 101 円のヨーロピアン・コール・オプションの現在の価格が 1 円であった。裁定利益が得られない場合、権利行使価格と満期が同じヨーロピアン・プット・オプションの価格を求めなさい。答えだけでなく計算過程も記載すること。

(3) 企業 A の 1 株当たり配当金は 1 年後の今年度期末に 10 円、来年度以降は年率 4%で毎年増配と予想されている。資本コストを 6%として配当割引モデルを用いて現在の妥当な株価を計算しなさい。また企業 A の株式が市場で 400 円で売買されている場合、この株式を購入するべきか理由とともに答えなさい。答えだけでなく計算過程も記載すること。

K6.（経済）

（1）ある財 A を提供する 2 つの企業 $i=1,2$ が存在し、財の逆需要関数が

$$p = 1 - q_1 - q_2$$

で表されているとする。$p\ (p \geq 0)$ は財 A の価格を、$q_1, q_2\ (q_1, q_2 \geq 0)$はそれぞれ企業 1 と 2 の生産量を表す。また財 A を 1 単位生産するのに企業 1 は $c\ (c > 0)$、企業 2 は$kc\ (k > 1)$だけの費用がかかる。この条件のもとで、企業 1 と 2 が互いに利潤を最大化すべく財 A の生産量を決定し合うとする。このとき以下の問いに答えなさい。なお、解答の途中で定式化された最大化問題については内点解を仮定してよく、そのことを保証するために以下では、

$$c < \frac{1}{5} \text{ および } k < 3$$

を仮定する。

（ⅰ）均衡（クールノー・ナッシュ均衡）における両企業の生産量 q_1^*, q_2^* をそれぞれ求めなさい。

（ⅱ）均衡における企業 1 の利潤 $\pi_1(q_1^*, q_2^*)$ を求めなさい。

（ⅲ）$\pi_1(q_1^*, q_2^*)$ が、パラメータ c の変化とともにどのように変わるかを述べなさい。また、なぜそのような結果が得られるのかについても述べなさい。

（次ページにつづく）

（前ページからのつづき）

（2） 4 人の男性 (m_1, m_2, m_3, m_4) と 4 人の女性 (w_1, w_2, w_3, w_4) が参加する安定結婚問題を考える。各参加者は異性の参加者の集合に対して強選好をもつ。各男女の真の選好は以下で与えられる。

$m_1: w_2, w_3, w_4, w_1$　　$w_1: m_2, m_3, m_1, m_4$

$m_2: w_2, w_3, w_1, w_4$　　$w_2: m_3, m_1, m_2, m_4$

$m_3: w_1, w_2, w_3, w_4$　　$w_3: m_1, m_2, m_3, m_4$

$m_4: w_2, w_4, w_1, w_3$　　$w_4: m_4, m_3, m_1, m_2$

上記のリストは、例えばm_1にとってw_2が 1 位, w_3が 2 位, w_4が 3 位, w_1が 4 位であることを意味する。男性告白型 DA (Deferred Acceptance)アルゴリズムでマッチングを決めるとする。このとき、虚偽の選好を表明することで真の選好を表明する場合よりも好ましい男性と結婚できる女性が存在するかどうかを理由とともに答えなさい。ただし、虚偽表明は一人の女性が単独で行い、その女性以外は真の選好を表明するものとする。

K7.（情報）

(1) 次の（ⅰ）、（ⅱ）、（ⅲ）の問いに答えなさい。

（ⅰ）以下の文章を読み、（ア）から（ウ）に適する語を答えなさい。

$\boxed{（ア）}$とは、そのままでは解決が困難な問題をより小さな問題に分割し、それらの問題を別々に解決することで、元の問題を解決する手法である。$\boxed{（ア）}$に基づいたソーティングの手法としてマージソートが挙げられる。マージソートは$\boxed{（イ）}$の配列を 2 個マージ（併合）し、1 個の$\boxed{（イ）}$の配列を作成するという考えに基づいたソーティングである。マージソートの python プログラムを図 1 に示す。図 1 のプログラムにおいては、メソッド$merge_sort$の中で$merge_sort$を呼び出すという$\boxed{（ウ）}$呼び出しを行っている。

（ⅱ）図 1 のプログラムを実行したとき、プログラムの出力値（①の行の出力値）を答えなさい。

（ⅲ）要素数がN個$(N = 2^k, k > 1)$の配列を対象にマージソートを行う場合、マージソートの時間計算量（オーダー）を解答し、その理由を説明しなさい。

（次ページにつづく）

（前ページからのつづき）

```
def merge_sort(arr):
    if len(arr) <= 1:
        return arr
    mid = len(arr) // 2
    left = merge_sort(arr[:mid])
    right = merge_sort(arr[mid:])
    return merge(left, right)

def merge(left, right):
    merged_arr = []
    i = 0
    j = 0
    k = 0
    while i < len(left) and j < len(right):
        if left[i] < right[j]:
            merged_arr.append(left[i])
            i += 1
        else:
            merged_arr.append(right[j])
            j += 1

    while i < len(left):
        merged_arr.append(left[i])
        i+=1

    while j < len(right):
        merged_arr.append(right[j])
        j+=1
    print( merged_arr )   ①
    return merged_arr

a = [81, 13, 4, 38, 69, 22, 41, 43]
result = merge_sort(a)
```

図 1

（次ページにつづく）

（前ページからのつづき）

（2） 配列xにN個$(N > 1)$の数値データが格納されているものとする。キーkと同じ値が配列xに存在するかどうかを調べる方法として（a）、（b）、（c）の探索方法がある。

（a） 線形探索

（b） 二分探索

（c） ハッシュ探索

（a）、（b）、（c）を用いた場合の具体的な探索アルゴリズムについて、それぞれ説明しなさい。図を用いて説明してもよい。ここで配列xに格納されているデータに重複はないものとする。また必要ならば事前に配列xの要素を入れ替えるなどの処理をしてもよい。

K8.（人間工学）

（1）2 種類の異なる監視操作卓 A､B の違いがワークロードに与える影響を評価するために、被験者内計画を適用して NASA-TLX によるワークロード評価実験を実施した。次の（ⅰ）と（ⅱ）に解答しなさい。

（ⅰ）ある被験者を対象にこの評価実験を実施したところ、表 1 に示される一対比較の結果ならびに表 2 に示される NASA-TLX の主観評点の結果がそれぞれ得られた。WWL 得点を算出して、監視操作卓 A、B がこの被験者に与えるワークロードの大小を説明しなさい。なお WWL 得点の算出過程を明示すること。

表 1　2 種類の監視操作卓に対する一対比較の結果

OPERATOR CONSOLE	MENTAL DEMAND	PHYSICAL DEMAND	TEMPORAL DEMAND	PERFOR-MANCE	EFFORT	FRUSTRATION LEVEL
A/B	5	1	3	2	3	1

表 2　ある被験者の 2 種類の監視操作卓に対する NASA-TLX 評価データ

OPERATOR CONSOLE	MENTAL DEMAND	PHYSICAL DEMAND	TEMPORAL DEMAND	PERFOR-MANCE	EFFORT	FRUSTRATION LEVEL
A	80	20	60	50	60	20
B	60	40	50	40	50	30

（ⅱ）監視制御作業において、作業者のワークロードを減少させることが必ずしも適当であるとは限らない理由について説明しなさい。

（2）図 1 は人間の状況認識（Situation Awareness）のモデルの一部を示したものである。なお、図 1 の波線の外側にもモデルの要素があり、波線はその省略を意味する。このモデルに基づいて、人間の状況認識について説明しなさい。なお、図 1 に含まれる(a)、(b)、(c)の要素を必ず含めて説明すること。

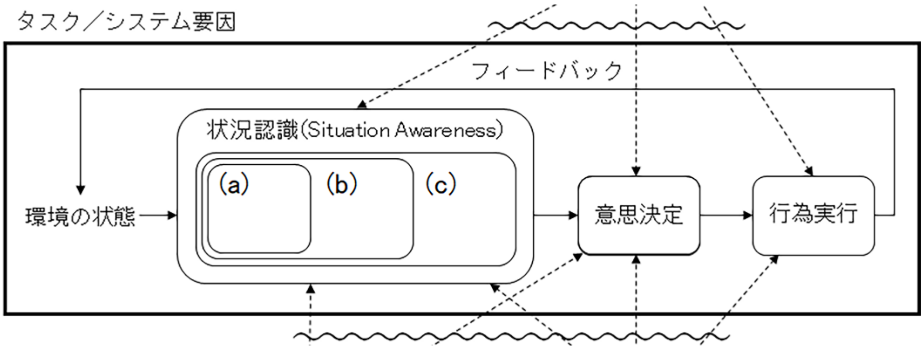

図 1 状況認識（Situation Awareness）のモデル（一部）

K9.（インダストリアル・エンジニアリング）

(1) ある企業では、規模拡大のために新たに従業員を採用することを検討している。採用の規模によって、毎月の営業利益を予測してみたところ表 1 のようになった。営業利益とは、売上収益から仕入原価その他の営業経費を引いたもので、人件費を差し引く前の利益である。この企業が選択すべき経済的に最も有利な投資案を示しなさい。なお、1 名の従業員にかかる毎月の費用は 30 万円とする。

表 1　採用人数と営業利益

投資案	採用人数（人）	営業利益（万円）
A 案	1	60
B 案	2	150
C 案	3	200
D 案	4	210
E 案	5	240

(2) 「標準時間」について説明し、さらに、その算出方法を「基本時間」、「余裕時間」、「観測時間」、「レイティング係数」の 4 つの単語を使って示しなさい。

<余白 1>

＜余白２＞

＜余白 3＞