2025年8月

慶應義塾大学大学院　理工学研究科

前期博士課程　入学試験問題

教育研究分野：B 物理学

受験生への注意

- この問題冊子の総ページ数は8ページです。問題は2ページから5ページに印刷されており、6ページから8ページは計算用紙です。
- この問題冊子には3つの問題があります。その3問全てに解答しなさい。
- 問題1問につき必ず1枚の答案用紙（裏面も使用可）を使って解答しなさい。
- すべての答案用紙の所定欄に、問題番号（例：B1）と受験番号を記入しなさい。(氏名は記入しない)
- **答案用紙は綴じたままにしておいてください。**
- 問題冊子は切り離して使用してかまいません。

B1.（力学・解析力学・電磁気学）

I　図 1 のように，水平方向に x 軸，鉛直下方向に y 軸をとった xy 座標系を考え，滑らかな斜面 OP に束縛された質量 m の質点の運動を考える．鉛直下向きに大きさ g の重力加速度がかかっている．質点は時間 $t=0$ において原点 O から初速度ゼロで放たれ，$t=T$ において定点 P $\left(\dfrac{\pi h}{2}, h\right)$ に到達するとする．ここで到達時間 T を最小にする斜面 OP の形を決定したい．斜面の傾き $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ は OP 間において常に非負，点 P においてはゼロとする．

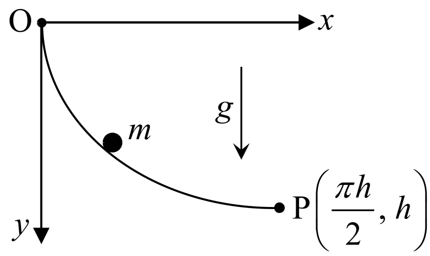

図1

(1) 斜面 OP 上の位置 (x, y) における質点の速さ v を，y, g を用いて書きなさい．

(2) 到達時間 T は次のように，ある関数 $I\left(x, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, y\right)$ の点 O から P における積分

$$T=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} \mathrm{d}t=\int_0^h I\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, y\right)\mathrm{d}y$$

として表せる．関数 I を求めなさい．ただし，質点が点 O から斜面上を進んだ距離を s とおくと，その微小線要素 $\mathrm{d}s$ は $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$ となることを用いてよい．

(3) T の最小値を求めるためには，(2) の積分が停留値をとるように関数 I を決定すればよい．変分原理より導かれる，I に関するオイラー・ラグランジュ方程式を書きなさい．さらに，斜面の形を決める微分方程式を，$y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, h$ を用いて書きなさい．

(4) (3) の微分方程式をみたす解 y を，媒介変数 $\theta(t)$ を用いて $y=\dfrac{h}{2}(1-\cos\theta(t))$ とおいたとき，x を $\theta(t)$ を用いて書きなさい．また，T の最小値 T_1 を求めなさい．

II　図 2 のように，点 O を中心とし xy 平面内に位置する半径 R の円形回路 C を，定常電流 I が z 軸の正の方向から見て反時計回りに流れている．真空の透磁率を μ_0 とする．

(1) 円形電流 I が作る磁気双極子モーメント $\boldsymbol{M}$ は，$\boldsymbol{M}=\dfrac{I}{2}\oint_C \boldsymbol{r}'\times \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ で与えられる．$\boldsymbol{M}$ の x, y, z 成分を R, I を用いて書きなさい．

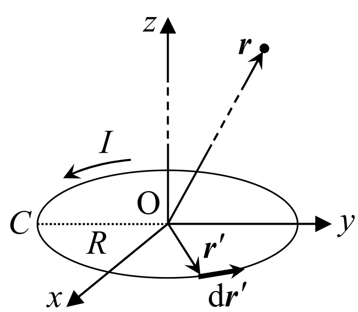

図2

(2) 電流 I が位置 $\boldsymbol{r}$ に作るベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は，クーロンゲージをとった場合，十分遠方 $|\boldsymbol{r}| = r \gg R$

において，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \simeq \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ と近似できる．このベクトルポテンシャルから，電流 I が遠方の位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁束密度は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = D_1(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{M} + D_2(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}$ の形に表せる．$D_1(\boldsymbol{r})$, $D_2(\boldsymbol{r})$ を $r, \boldsymbol{r}, \mu_0, \boldsymbol{M}$ を用いて書きなさい．必要に応じて，ベクトル演算 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ を用いてよい．

次に，図 3 のように，一様な重力場において鉛直上方向に z 軸をとり，z 軸を中心とした絶縁体円筒に半径 R の円形回路 C_1, C_2 を巻きつけた．C_1, C_2 には，それぞれに定常電流 I_1, I_2 を図の向きに流している．そのうえで，C_1 は $z = 0$ において水平に固定し，C_2 は水平を保って鉛直方向に滑らかに動けるようにしたところ，C_2 が $z = z_0$ において静止した．ただし，$z_0 \gg R$ とする．円筒の透磁率は真空の透磁率 μ_0 と等しいとみなし，円形回路 C_2 の質量を m，重力加速度の大きさを g とする．

(3) 円形回路 C_2 が C_1 から受ける力を求め，z_0, R, μ_0, I_1, I_2 を用いて書きなさい．

(4) 円形回路 C_2 を，静止位置から微小変位させたあとに放したところ，単振動した．振動の周期を，$m, z_0, R, \mu_0, I_1, I_2$ を用いて書きなさい．ただし，振動による誘導電流は無視できるとする．

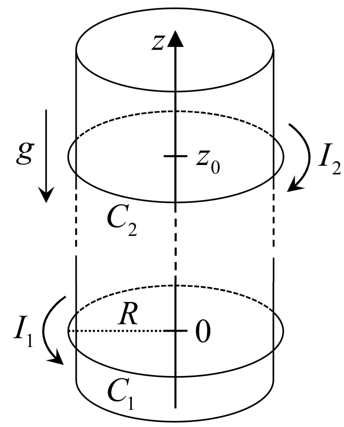

図3

B2.（熱力学・統計力学）

3 次元のポテンシャルエネルギー $V(\boldsymbol{r})$ によって閉じ込められた，N 個の古典粒子からなる理想気体を考える．i 番目の粒子の座標を $\boldsymbol{r}_i$，運動量を $\boldsymbol{p}_i$，また各粒子の質量を m とすると，この系のハミルトニアンは $H = \sum_{i=1}^{N} \left[\dfrac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}_i) \right]$ によって与えられる．系は絶対温度 T の熱平衡状態にあるとしてカノニカル分布を考える．ボルツマン定数を k_B，プランク定数を h とする．必要に応じて，$\alpha > 0$ に対する積分公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ を用いてよい．

はじめに，体積 $V = L^3$ の立方体の容器に閉じ込められた気体を考える．$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と成分表示したとき，ポテンシャルエネルギーは

$$V(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x, y, z \leq L \text{ のとき}) \\ +\infty & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で与えられる．

(1) 系の分配関数を求めなさい．

(2) 系の熱容量を求めなさい．

(3) (1) で求めた分配関数を用いて理想気体の状態方程式 $PV = Nk_\mathrm{B}T$ を導きなさい．ここで，P は気体の圧力である．

(4) 系のエネルギーゆらぎ $\sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$ を求めなさい．ここで，$\langle \cdots \rangle$ は絶対温度 T のカノニカル分布による平均を意味する．

次に，球対称調和ポテンシャル $V(\boldsymbol{r}) = \dfrac{m\omega^2}{2}|\boldsymbol{r}|^2$ に閉じ込められた気体を考える $(\omega > 0)$.

(5) 系の分配関数を求めなさい．

(6) 系の熱容量を求めなさい．

(7) パラメータ ω を $\omega = \omega_\mathrm{i}$ から $\omega = \omega_\mathrm{f}$ になるまで動かす準静的等温過程を考える．このとき系に加えられる仕事 W を求めなさい．

最後に，非調和ポテンシャル $V(\boldsymbol{r}) = A|\boldsymbol{r}|^4$ に閉じ込められた気体を考える $(A > 0)$.

(8) 系の熱容量を求めなさい．

B3.（量子力学）

3 次元の中心力ポテンシャル $V(r)$ 中を量子力学的に運動する質量 m の粒子を考える．ここで，粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とし，$r = |\boldsymbol{r}|$ とする．プランク定数を h とし，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする．

(1) 粒子の運動量演算子を $\boldsymbol{p}$，角運動量演算子を $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ とする．交換関係 $[L_z, x]$, $[L_z, L_x]$ を求めなさい．

(2) この系のハミルトニアン H と $\boldsymbol{L}^2, L_z$ は互いに可換のため，それらの同時固有状態を考える．極座標 (r, θ, ϕ) を考え，波動関数を $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ と分解する．極座標表示では $L_z = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ と書け，$L_z\psi(r, \theta, \phi) = \hbar\lambda\psi(r, \theta, \phi)$（$\lambda$ は実数）を満たす．波動関数 $\psi(r, \theta, \phi)$ が一価になることを要請するとき，λ の可能な値を求めなさい．また，規格化条件 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\Phi(\phi)|^2 \mathrm{d}\phi = 1$ を満たす $\Phi(\phi)$ を求めなさい．

以下では，デルタ関数型のポテンシャル $V(r) = \dfrac{\hbar^2\gamma}{2m}\delta(r-a)$（$\gamma, a$ は定数で $a > 0$）を考え，θ, ϕ に依存しない波動関数に着目する．このとき，動径方向の波動関数 $R(r)$ は微分方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) + V(r)\right]R(r) = ER(r)$$

にしたがうことがわかる．ここで，E は粒子のエネルギーである．

(3) $\chi(r) = r^c R(r)$（c は定数）とおいて，$\chi(r)$ についての微分方程式から $\dfrac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r}$ の項が消えるような c の値を決めなさい．また，そのときの $\chi(r)$ の微分方程式を書きなさい．

(4) (3) の微分方程式について，$r < a$ の解を $\chi_<(r)$，$r > a$ の解を $\chi_>(r)$ とする．$\chi_<(r)$ と $\chi_>(r)$，およびその微分が $r = a$ で満たすべき接続条件をそれぞれ求めなさい．

まず，$\gamma > 0$ の場合の散乱状態について考える．E は波数 k を用いて $E = \dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$ と書ける．

(5) $r < a$ での解 $\chi_<(r)$ を求めなさい．波動関数の係数は適当においてよい．

(6) $r > a$ での解は，定数 A, δ を用いて $\chi_>(r) = A\sin(kr + \delta)$ と書ける．このとき，(4) の条件を考慮して，$\cot\delta = (\tan\delta)^{-1}$ を a, k, γ のみを用いて書きなさい．

次に，$\gamma < 0$ の場合の束縛状態 $(E < 0)$ について考える．

(7) $r < a$，$r > a$ での解 $\chi_<(r)$，$\chi_>(r)$ をそれぞれ求めなさい．波動関数の係数は適当においてよい．

(8) (4) の条件を考慮すると，$\gamma < \gamma_0$（γ_0 はある定数）のときに限り，束縛状態が存在する．γ_0 を求めなさい．

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）