2025 年 8 月

慶應義塾大学大学院　理工学研究科

前期博士課程　入学試験問題

教育研究分野：A 数理科学

受験生への注意

- この問題冊子の総ページ数は 8 ページです。問題は 2 ページから 6 ページに印刷されており、7 ページおよび 8 ページは計算用紙です。
- この問題冊子には 5 つの問題があります。**すべての問題**に解答しなさい。
- 問題 1 問につき必ず 1 枚の答案用紙を使って解答しなさい。必要なら裏に解答を書いてもかまいません。問題に対しては、答だけでなく、答を求める過程も書きなさい。
- すべての答案用紙の所定欄に、問題番号（例：A1）と受験番号を記入しなさい。（氏名は記入しないこと）
- 答案用紙は切り離さないでください。

Ａ１．（微分・積分と線形代数の基礎）

(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\log(1+x) - P(x)}{x^3} = 0$$

を満たす 3 次多項式 P を求めなさい．

(2)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 3,\ y \leq 1,\ x+3y \geq 3\}$$

とする．重積分

$$\iint_D \left(\sin(x^2) + y\sqrt{y^3+1} \right) dxdy$$

の値を求めなさい．

(3) 3 次正方行列 A を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) A の固有値をすべて求めなさい．

(ii) (i) で求めた各固有値に対する固有空間の基底を求めなさい．

(iii) A を対角化する直交行列 P を求め，対角化しなさい．

A２.（微分・積分とその応用）

(1) 閉区間 $[0,1]$ 上の連続実関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様収束するとき，その極限の関数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ が連続になることを示しなさい.

(2) 閉区間 $[0,1]$ 上の実関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，$n = 1, 2, \ldots$ と $x \in [0,1]$ に対し

$$f_n(x) = n^2 x^{n+2} - n^2 x^n + x^2$$

と定める．この関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が各点収束するかどうかを判定し，各点収束する場合は極限の関数 f を求め，各点収束しない場合はその理由を述べなさい.

(3) (2) で定めた関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様収束するかどうかを判定し，一様収束する場合は極限の関数 f を求め，一様収束しない場合はその理由を述べなさい.

(4) (2) で定めた関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，数列

$$\left\{ \int_0^1 f_n(x)\,dx \right\}_{n=1}^{\infty}$$

が収束するかどうかを判定し，収束する場合は極限の値を求め，収束しない場合はその理由を述べなさい.

Ａ３．（線形代数とその応用）

正の整数 p, n が $p < n$ を満たすとする．1 次独立な n 次列ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in \mathbb{R}^n$ をとり，$n \times p$ 行列 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p]$ と定める．また，n 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ をとり，C^2 級の p 変数関数 $Q \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ を

$$Q(\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

と定める．ただし，本問を通じて，${}^t\!A$ を行列（またはベクトル）A の転置，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルムとする．

(1) $\boldsymbol{X}$ を表現行列とする線形写像を $f \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ とすると，f は単射であることを示しなさい．

(2) p 次正方行列 ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}$ は実対称行列で，かつ正定値であることを示しなさい．

(3) 関数 Q の最小点 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{y}$ を用いて表しなさい．

(4) (3) の $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を用いて $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ とする．各 i $(i = 1, \ldots, p)$ に対して

$$\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}_i \rangle = 0$$

となることを示しなさい．

(5) (4) の $\boldsymbol{e}$ について

$$\|\boldsymbol{e}\| \leq \|\boldsymbol{y}\|$$

となることを示しなさい．

Ａ４.（代数の基礎）

集合 X に対して，X から X への全単射な写像全体の集合を $S(X)$ とする．任意の $f, g \in S(X)$ に対して合成 $g \circ f \in S(X)$ を対応させる 2 項演算を考えると，$S(X)$ は群になる．$S(X)$ の単位元は恒等写像 id_X で与えられ，$f \in S(X)$ の逆元は逆写像 f^{-1} で与えられる．

(1) $X = \{1, 2, 3\}$ のとき，群 $S(X)$ の位数を求めなさい．また，$X = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき，群 $S(X)$ の位数 2 の元の個数を求めなさい．

(2) 自然数 $n \geq 1$ に対して，$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．$i \in X$ に対して

$$G_i = \{f \in S(X) \mid f(i) = i\}$$

とおくと，G_i は $S(X)$ の部分群である．任意の $i, j \in X$ に対して，群としての同型写像 $\varphi_{ij} \colon G_i \to G_j$ を具体的に構成しなさい．

(3) X を集合とする．$S(X)$ の部分群 $H \subset S(X)$ を考える．集合 X に 2 項関係 $\sim_H$ を

$$x \sim_H y \quad \Leftrightarrow \quad \exists h \in H \ h(x) = y$$

と定義する．このとき，$\sim_H$ は同値関係になることを証明しなさい．

(4) X を集合とする．いま，G を $S(X)$ の部分群として，N を G の正規部分群とする．$S(X)$ の部分群 N に対して (3) で与えられた同値関係を $\sim_N$ として，商集合 $X/{\sim_N}$ を X_N とおく．このとき，任意の $f \in G$ は写像 $f_N \colon X_N \to X_N$ を誘導し，この対応により群としての準同型写像 $G/N \to S(X_N)$ が定まることを証明しなさい．

A５．（集合・位相の基礎）

集合 X の部分集合 A に対し，A^c で A の補集合 $\{x \in X \mid x \notin A\}$ を表す.

(1) X, Y を集合とし，X から Y への写像 $f\colon X \to Y$ を考える．Y の部分集合 A に対し f の逆像に関する等式 $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ が成り立つことを証明しなさい.

$(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ で $\mathbb{R}^2$ に標準的な位相を入れた位相空間を表す．つまり，$\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}^2$ の標準的な開集合族である.

(2) $\mathbb{R}^2$ の部分集合族

$$\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^2 \mid U^c \text{ は有限集合 }\}$$

が開集合族の公理を満たすことを証明しなさい.

以下，$(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$ で $\mathbb{R}^2$ に (2) の $\mathcal{U}$ が定める位相を入れた位相空間を表す.

(3) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ から $(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$ への任意の単射な写像は連続であることを証明しなさい.

(4) 位相空間がハウスドルフ空間であることの定義を述べ，$(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$ がハウスドルフ空間か否かを答えなさい．また，そのことを証明しなさい.

(5) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$ から $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ への任意の連続写像は定値写像であることを証明しなさい．ただし，定値写像とは，その像が 1 点のみからなる写像のことをいう.

(計算用紙)

(計算用紙)