C1. （電気・電子回路）

出題の意図

電気・電子回路分野共通：アナログ受動および能動素子を含む回路において、回路理論を基にした回路方程式やグラフを用いてその素子および回路の性質を具体的に説明できることを確認する。

解答例

(a) 回路の例として抵抗、コンデンサ、直流電源、スイッチの直列接続を考える。コンデンサの端子間電圧および時間を変数として回路方程式を記述する。スイッチの入り/切り、およびコンデンサの初期電圧値を設定し、コンデンサの端子間電圧の時間変化を指数関数で表現する。例えば、電源電圧を V_S、コンデンサの初期電圧を V_0 とすると、$v = V_S + (V_0 - V_S)\exp(-\frac{t}{CR})$ を得る。その他、電源方式（直流/交流)、コイルとコンデンサの組み合わせによる 2 次の過渡解析、時定数の定義などに関する解答が期待された。直流安定化電源では、整流ダイオードの組み合わせによる全波整流の後、コンデンサを用いて電圧が平滑化される。コンデンサの充電/放電を回路方程式から定式化し、実用的な抵抗やコンデンサ容量の数値を用いて電圧の時間変動幅（リップル）を試算するなどの解答が期待された。

(b) 演算増幅器を含む加算・減算回路、微分・積分回路の回路図を示し、回路方程式から入力電圧に対して出力電圧がそれぞれの演算結果を表すことを示す。例えば、交流電源、抵抗、オペアンプ、その負帰還回路にコンデンサを接続した積分回路では、$v_{out} = -\frac{1}{RC}\int v_{in}dt$ となる。加えて、例えばその帰還部のコンデンサに抵抗を並列接続した回路を示し、利得と位相の周波数特性を図示する、さらに遮蔽周波数の条件を導出するなどの記述が期待された。

C2. （電磁気学・量子力学）

出題の意図

電磁気学および量子力学に関する基本知識の習得を確認する問題である。

(1) マクスウェル方程式の理解度を確認する。
(2) 電磁波の伝搬を表す波動方程式の理解、また、電磁波の基本特性の理解を確認する。
(3) ガウスの法則を正しく理解し、それを用いて、面電荷密度から電位を求めることができるか確認する。
(a) 電子スピンの存在を初めて実験的に示した「シュテルン＝ゲルラッハの実験」の概要、および電子スピンの量子力学的意味の理解を確認する。
(b) 重ね合わせた量子状態の観測について、量子力学・量子計測の観点から説明できることを確認する。

解答例

(1)（電場に関する）ガウスの法則　$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

電場は電荷を起源として生じる。

磁場に関するガウスの法則　$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

磁場のわき出しはない。磁気単極子は存在しない。

ファラデーの法則　$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

時間的に変化する磁場によって、その周囲に電場が誘起される。

アンペール・マクスウェルの法則　$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

電流および時間変化する電場によって、その周囲に磁場が誘起される。

また、関連する物理法則として、例えば、クーロンの法則、ビオ・サバールの法則、アンペールの法則、ファラデーの電磁誘導の法則などを挙げ、その意味を説明できることが期待された。

(2) 電場の波動方程式　$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 t} \right) = \boldsymbol{0}$

磁場の波動方程式　$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial^2 t} \right) = \boldsymbol{0}$

電場と磁場は互いに直交し伝搬する、また、伝搬方向にも直交しているなど、電磁波の伝搬について説明できることが期待された。

(3) 球殻表面の電荷は、$Q = 4\pi a^2 \sigma$。 $a < r$ では、半径 r より内側の全電荷は Q。また、$r < a$ では、半径 r より内側の電荷は 0。以上より、ガウスの法則を用いると、r における電場は、

$a < r : \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ したがって、 $\boldsymbol{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \boldsymbol{e}_r$

$0 < a < r : \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$ したがって、$\boldsymbol{E}(r) = \boldsymbol{0}$

無限遠の電位を 0 として上記を積分することで、位置 r における電位は下記のように求め

ることができる。

(i) $0 < r < a : \dfrac{\rho a^2}{\varepsilon_0 r}$

(ii) $a < r : \dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}$

(a) 1922 年、シュテルンとゲルラッハは、銀原子ビームを不均一磁場中に入射する実験を行った。古典論ではビームは連続的に広がると予測されたが、実際には明瞭に 2 本に分離した。これは磁気モーメントの空間量子化を示している。銀の最外殻電子は $5s$ 軌道にあり軌道角運動量を持たないため、この分裂は電子が持つ固有の角運動量である「スピン」の存在を決定づけるものとなった。以上のようなシュテルン＝ゲルラッハの歴史的な実験について説明できることが期待された。

(b) ① 状態 Ψ は ϕ_1 と ϕ_2 を $1:1$ で重ね合わせた状態であるため、求める状態 Ψ は、以下のような線形結合で表せる。

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle$$

② ある量子状態 Ψ において、状態 ϕ_1 が観測される確率 P は、射影仮説（ボルンの規則）に基づき、内積の絶対値の 2 乗で与えられる。

$$P(\phi_1) = |\langle\phi_1|\Psi\rangle|^2$$

よって、これに先ほど求めた Ψ を代入して計算すると、

$$\langle\phi_1|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となり、確率 P は以下のように求まる。

$$P(\phi_1) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

③ 量子力学の測定では、演算子の固有値のみが観測される。固有状態 ϕ_1, ϕ_2 の重ね合わせの場合、測定値は確率的に固有値 a_1 または a_2 のいずれかとなり（本例では各確率 1/2）、測定と同時に状態は対応する固有状態へ瞬時に収縮する。個々の測定結果はランダムだが、測定を繰り返して得られる平均値は、量子力学的な期待値 $\langle A\rangle = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2$ に収束する。以上のような量子力学に関する基本知識について説明できることが期待された。

C3. （物理情報数学）

出題の意図

(a) 複素周回積分を行う閉経路内に特異点が存在する場合について、留数定理を理解していることを確認する。

(b) 写像を表す行列について、正規方程式を立てることができ、最小 2 乗法を説明できることを確認する。

(c) z 変換について基本的な性質を理解しており、差分方程式の解法として応用できることを確認する。

解答例

(a) 留数定理は、複素関数 $f(z)$ が閉経路 C 内部の有限の個の特異点 $b_1, \ldots, b_n$ を除いて、閉経路上およびその内部で正則であるとき

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), b_k)$$

が成り立つことである。ここで $\mathrm{Res}(f(z), b_k)$ は $f(z)$ の特異点 b_k における留数である。次に、具体例を示す。例えば $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$、C を $|z| = 2$ とすると C の内部の特異点は $z = 1$ のみあり、特異点を除いて $f(z)$ は正則である。$z = 1$ の留数は

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f(z), 1) &= (z-1)f(z)|_{z=1} \\ &= 1\end{aligned}$$

であるので

$$\oint_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i$$

である。

(b) (1) 零空間と行空間は、互いに直交補空間の関係にある。

(2) 最小 2 乗法で説明すると

$$A^\top A\hat{\boldsymbol{x}} = A^\top \boldsymbol{b}$$

の正規方程式を示し、$A^\top A$ が正則であるとき

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (A^\top A)^{-1}A^\top \boldsymbol{b}$$

のように求めることができる。

(c) (1) 関数 $x(k)$ について

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

が $x(z)$ の z 変換の定義である。

(2) $\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

(3) $\dfrac{r\sin\omega_0 \cdot z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + r^2 z^{-2}}$

(4) $x(k)$ と $y(k)$ の畳み込み和であり、$\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)y(k-l)$ である。

(5) 差分方程式を $x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = 1$ とし、$x(1) = x(0) = 0$ とする。差分方程式を z 変換して

$$z^2 X(z) - 3zX(z) + 2X(z) = \frac{z}{z-1}$$

となる。

$$\begin{aligned} X(z) & \frac{z}{(z-1)(z^2-3z+2)} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2(z-2)} \\ &= -\frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-2} \end{aligned}$$

を得るので、逆変換して

$$\begin{aligned} x(k) &= -1 \cdot 1^k - 1 \cdot k \cdot 1^k + 1 \cdot 2^k \\ &= -1 - k + 2^k \end{aligned}$$

となる。