B．物理学

B1.（力学・解析力学・電磁気学）

出題の意図

前半は，最速降下問題に対する変分原理を題材に力学・解析力学の基本的な理解度を問う問題である．後半は，磁場中での磁気双極子モーメントの運動を題材に電磁気学の基本的な理解度を問う問題である．

解答例

I

(1) $v = \sqrt{2gy}$.

(2) $I\left(x, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, y\right) = \sqrt{\dfrac{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y)^2 + 1}{2gy}}$.

(3) $\dfrac{\partial I}{\partial x} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\partial I}{\partial(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y)}\right) = 0$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \dfrac{h}{y} - 1$.

(4) $x = \dfrac{h}{2}(\theta - \sin\theta)$, $T_1 = \pi\sqrt{\dfrac{h}{2g}}$.

II

(1) $\boldsymbol{M} = (0, 0, \pi R^2 I)$.

(2) $D_1(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}$, $D_2(\boldsymbol{r}) = \dfrac{3\mu_0 \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^5}$.

(3) 円形回路 C_2 が C_1 から受ける力 $\boldsymbol{F} = \left(0, 0, \dfrac{3\pi\mu_0 R^4 I_1 I_2}{2z_0^4}\right)$.

(4) 周期 $T = \dfrac{z_0^2}{R^2}\left(\dfrac{2\pi m z_0}{3\mu_0 I_1 I_2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

B2.（熱力学・統計力学）

出題の意図

3 次元のポテンシャル中の理想気体を題材に熱力学・統計力学の基本的な理解度を問う問題である.

解答例

(1) 分配関数 $Z = \dfrac{V^N}{h^{3N} N!}(2\pi m k_\mathrm{B} T)^{\frac{3N}{2}}$.

(2) 熱容量 $C = \dfrac{3}{2} N k_\mathrm{B}$.

(3) 自由エネルギーは $F = -k_\mathrm{B} T \ln Z$ であり，圧力は $P = -\dfrac{\partial F}{\partial V} = k_\mathrm{B} T \dfrac{\partial}{\partial V} \ln Z = \dfrac{N k_\mathrm{B} T}{V}$ となる．両辺に V をかけると $PV = N k_\mathrm{B} T$.

(4) $\sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \sqrt{\dfrac{3N}{2}} k_\mathrm{B} T$.

(5) $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ として，分配関数 $Z = \dfrac{1}{N!}\left(\dfrac{k_\mathrm{B} T}{\hbar \omega}\right)^{3N}$.

(6) 熱容量 $C = 3 N k_\mathrm{B}$.

(7) 仕事 $W = 3 N k_\mathrm{B} T \ln\left(\dfrac{\omega_\mathrm{f}}{\omega_\mathrm{i}}\right)$.

(8) 熱容量 $C = \dfrac{9}{4} N k_\mathrm{B}$.

B3. (量子力学)

出題の意図

3次元の球対称な量子系での散乱・束縛状態を題材に量子力学の基本的な理解度を問う問題である.

解答例

(1) $[L_z, x] = \mathrm{i}\hbar y$, $[L_z, L_x] = \mathrm{i}\hbar L_y$.

(2) $\lambda = m \in \mathbb{Z}$, $\Phi(\phi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \quad (m \in \mathbb{Z})$.

(3) $c = 1$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \gamma\delta(r-a) + \dfrac{2mE}{\hbar^2} \right) \chi(r) = 0$.

(4) $\dfrac{\mathrm{d}\chi(r)}{\mathrm{d}r} = \chi'(r)$ と書くと, $\chi'_>(a) - \chi'_<(a) - \gamma\chi(a) = 0$, $\chi_>(a) - \chi_<(a) = 0$.

(5) $\chi_<(r) = A\sin(kr)$ (A は定数).

(6) $\cot\delta = -\cot(ka) - \dfrac{k}{\gamma} \dfrac{1}{\sin^2(ka)}$.

(7) $E = -\dfrac{\hbar^2\rho^2}{2m}$ $(\rho > 0)$ とおくと, $\chi_<(r) = B\sinh(\rho r)$, $\chi_>(r) = C\mathrm{e}^{-\rho r}$ (B, C は定数).

(8) $\gamma_0 = -\dfrac{1}{a}$.