Ａ．数理科学

Ａ１．（微分・積分と線形代数の基礎）

出題の意図

多項式近似, 重積分や対角化に対する具体的な計算力を確認する.

解答例

(1) $P(x) = x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x^3.$

(2) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\cos 9.$

(3) (i) 固有値は 0 (重複度２) と 2.

(ii) 固有値 0 の固有空間の基底として, 例えば ${}^t(1,1,0)$ と ${}^t(0,0,1)$ を, 固有値 2 の固有空間の基底として例えば ${}^t(1,-1,0)$ をとることができる.

(iii) 例えば, 直交行列 P として

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

をとれば,

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化される.

Ａ２．（微分積分とその応用）

出題の意図

関数列の一様収束に関する知識や計算力を確認する.

解答例

(1) ε-δ 論法を適切に使って証明を述べることができるかを問う.

(2) $f(x) = x^2$ で定まる関数 f に各点収束する.

(3) 一様収束しない. 直接証明することもできるが, (2) の結果と (4) の積分の値を比較することによっても結論を導くことができる.

(4) $-\dfrac{5}{3}$ に収束する.

Ａ３．（線形代数とその応用）

出題の意図

線形代数の観点から最小二乗法を問う.

解答例

(1) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ の 1 次独立性から $\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ の解が $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ のみとなることに注意する.

(2) f の単射性を用いる.

(3) $\hat{\boldsymbol{\beta}} = ({}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{X})^{-1}\,{}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{y}$.

(4) $P = \boldsymbol{X}({}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{X})^{-1}\,{}^t\boldsymbol{X}$ とおくと, (3) より $\boldsymbol{e} = (I - P)\boldsymbol{y}$ と表せること, $P\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}({}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{X})^{-1}\,{}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$ となることに注意する.

(5) $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ が Q の最小点であることに注意する.

A 4 .（代数の基礎）

出題の意図

群, 同値関係, 商群, 商集合などの基本的な性質の理解を確認する.

解答例

(1) $X = \{1, 2, 3\}$ のとき, $S(X)$ の位数は 6. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき, $S(X)$ の位数 2 の元の個数は 9 個.

(2) $\{1, \ldots, n\}$ の i と j を入れ替える互換による共役を考える.

(3) 集合への群の作用が同値関係を定めることを理解しているかを問う.

(4) N が正規部分群であることに注意して, f_N が誘導されることを示す. f に f_N を対応させる写像の核が N を含むことに注意して, 準同型写像 $G/N \to S(X_N)$ が定まることを示す.

A 5 .（集合・位相の基礎）

出題の意図

集合と位相に関する基礎的な事項の理解を確認する.

解答例

(1) 写像の逆像および補集合の定義を理解しているかを問う.

(2) 開集合系の定義を理解しているかを問う.

(3) (1) と有限集合が $\mathbb{R}^2$ の通常の位相に関する閉集合であることに注意する.

(4) ハウスドルフ空間の定義を理解しているかを問う.

(5) (4) の証明と $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であることに注意する.